**Problem 1** 同时上三角化问题. **本题只讨论复矩阵**, 约定 .

1. (基础问题) 若 , 则 与 可同时酉上三角化.

* 同时酉上三角化: 存在酉矩阵 使得 与 都是上三角矩阵.

1. (基础问题) 称 是 的特征组, 当且仅当 且 . 试证明 与 可同时上三角化的一个充分条件:
   * 若 是 的特征组, 则存在 使得 是 的特征组.

* 定义三角指数为 Jordan-Chevalley 分解中幂零矩阵的秩. 以上充分条件说明 的三角指数小于 者.

1. (拓展问题) 结合奇异值分解以及 Schur 上三角化的过程, 证明: 对任意方阵 与 , 存在酉矩阵 与 使得 与 都是上三角矩阵.
2. (应试问题) 若 , 则 与 可同时上三角化. (特别地, 三角矩阵的对角元相同).

* 解答示例: 取 的特征组 , 此时
* 对上式右乘 , 得
* 也就是
* 由于 有限, 从而可以取较好的 使得 不是 的特征值. 此时 也是 的特征组. 因此, 存在第一列为 (数乘倍) 的的酉矩阵 , 使得
* 对 与 继续归纳即可. 这说明 和 可同时酉三角化, 使得三角矩阵的对角元相同.

1. (考研名题) 若 , 则 与 可同时上三角化.
2. (应试问题) 若 , 则 与 可同时上三角化.
3. (应试问题) 若 , 则 与 可同时上三角化.
4. (拓展问题) 若 是 的多项式, 则 与 可同时上三角化.
   * 一种解法: 证明 幂零, 再使用 Engel 定理.
5. (An Corollary of Engel's Theorem) 若 幂零, 则 与 可同时上三角化.

* Friedrich Engels (philosopher); Friedrich Engel (mathematician).

1. (应试问题) 若 , 则 与 可同时上三角化.
   * 此题理应需要一些提示; 但往期作业已经给出解答, 故提示略.
2. (脑经急转弯) 若 , 则 是幂零的 (从而 与 可同时上三角化).
3. (М. Левицький) 若幂零矩阵构成的集合 关于矩阵乘法封闭, 则 中矩阵可以同时上三角化 (这也是 Engel 定理的推论).

* 需要注意: 幂零矩阵对乘法, Lie 括号 () 等常见运算均不封闭. 只有很少一部分幂零矩阵可以构成带乘法的线性空间. 试回想习题课问题: 即 对一切 都是幂零的, 其乘式 未必是幂零矩阵.

1. (Lie–Kolchin) 将上一定理的幂零矩阵换做幂幺矩阵. 若矩阵构成的集合 关于矩阵乘法封闭, 则 中矩阵可以同时上三角化 (这也是 Engel 定理的推论).
2. (应试问题) 若 与 是 阶矩阵, 且 , 则 与 存在公共特征向量.
   * 相似的基础题: 若 与 是 阶矩阵, 且 , 则 与 有至少一者不可逆.
   * 相似的基础题: 若 与 是 阶矩阵, 且 , 则 与 有至少一者不可逆.
   * 相似的基础题: 若 与 是 阶实正交矩阵, 则 与 有至少一者不可逆.
3. (同时上三角化的判定准则) 给定复矩阵 与 , 以下论断等价.
   1. (矩阵表述) 存在酉矩阵 , 使得 与 是上三角矩阵;
   2. (线性空间表述) 存在一族逐渐递增的子空间
   * 使得 是 的不变子空间, 同时也是 的不变子空间.
   * Say is a flag variety of -invariant subspaces.
   1. ([McCoy 定理](https://mathworld.wolfram.com/McCoysTheorem.html)) 记 $\mathbb C\braket{x,y}$ 是二元非交换多项式环.
   * 注: , , 与 是 $\mathbb C\braket{x,y}$ 中四个不同的元素. 如果加上 这一限定, 得通常的二元多项式环 ).
   * 若对一切 $p\in \mathbb C\braket{x,y}$, 矩阵 的特征值恰好是 , 则 与 可同时上三角化. 逆命题是直接的.
   1. (McCoy 性质) 对一切 $p\in \mathbb C\braket{x,y}$, 矩阵 都是幂零的.
   2. (可解 Lie 代数表述) 记 是集合 连同运算
   * 生成的最大 线性空间. 归纳地定义
   * 称 是可解的, 当且仅当 .

**Problem 2** 可交换矩阵相关问题. 以下假定复数域 .

特别注释: 以下问题的类型是求解线性方程组的零空间, 故扩域不增加解空间 (零空间) 的基. 因此, 以下涉及维数的问题对任意域都成立. 在实际操作中, 一般不对未知的域直接选取代数闭域 (依赖选择公理), 通常的做法是:

1. 直接使用有理标准型 (许多教材选用有理标准型代替域扩张);
2. 用 进行有限扩张, 使得 能分解成一次因式的乘积.
3. (基础问题) 解方程 . 此处 就是 Jordan 块.
4. (应试问题) 若 是 -阶实矩阵, 其特征多项式和最小多项式都是 . 求线性空间维数:

* 给定 , 往后使用 表示方程 的所有解.

1. (基础问题) 记

* 试求 , 并计算其维数.

1. (基础问题) 记 与 是对角矩阵, 且 . 记 是秩 矩阵, 证明

* 的解唯一 (上周作业), 并求该解 (是 Cauchy 矩阵).
  + 关于 Cauchy 矩阵, 我们曾介绍过对称 Cauchy 矩阵及其推广形式的正定性 (使用 积分), Cauchy 矩阵的行列式与代数余子式, 以及其逆矩阵的所有元素和 (使用了一个指标求和的技巧).

1. (拓展问题) 结合有理标准型, 或者扩域上的 Jordan 标准型, 试描述矩阵方程 的解空间维数.
2. (基础问题) 证明: . 记 为 的多项式空间. 依照 Hamilton-Cayley 定理,

* 证明: 是 的子空间.

1. (应试问题) 证明以下三个命题等价:
   1. 的初等因子两两互素 (也就是特征多项式等于零化多项式);
   2. 子空间包含式 取等;
   3. 不等式 取等.
2. (拓展问题) 若 与 中的任一矩阵乘法交换, 则 . 换言之,

* 这不是什么困难的题目, 只是书写比较麻烦.

1. (拓展问题) Reformuler les questions ci-dessus avec le langage des schémas (géométrie algébrique).
2. (考研名题) 假定 是幂零矩阵. 若存在 使得 , 则 .
   * 提示: 证明 是 的多项式.
   * 类似的问题: 记 是半正定矩阵, 则 是 的多项式.
   * 类似的问题: 记 是本质正的矩阵 (存在唯一本质正的 -次根), 则 是 的多项式.